**ΕΘΝΙΚΟ ΚΑΙ ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ**

**ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ**

**Μάθημα: Η Διδασκαλία μέσω επίλυσης προβλήματος-Μαθηματικοποίηση**

**Χειμερινό εξάμηνο-Ακαδημαϊκό έτος 2023 – 2024**

**Διδάσκουσα: κ. Χρυσαυγή Τριανταφύλλου**

**Θέμα εργασίας:** *Σχεδιασμός μαθηματικού προβλήματος που να αφορά ένα περιβαλλοντικής φύσης θέμα/ζήτημα*

**Άννα Βλάχου** [Α.Μ.:1112201500031]

****

**Τίτλος: Η άγνωστη (;) όγδοη ήπειρος**

**Α) Μέρος 1: Εξερευνώντας την εκθετική ρύπανση των ωκεανών από πλαστικά**

Κάθε χρόνο δημιουργούνται περίπου 400 εκατομμύρια τόνοι πλαστικών απορριμμάτων, ένα μεγάλο ποσοστό των οποίων καταλήγει στους ωκεανούς. Εκτιμάται ότι τα πλαστικά στα υδάτινα περιβάλλοντα ανέρχονται σε 152 εκ τόνους το 2020. Σύμφωνα με την ιστοσελίδα [1] του Οργανισμού Οικονομικής Συνεργασίας και Ανάπτυξης (OECD), η παρουσία πλαστικών στα υδάτινα περιβάλλοντα αναμένεται να αυξάνεται ετησίως κατά 50%.

Α) Αν η μάζα (σε εκατομμύρια τόνους) των πλαστικών απορριμμάτων στα υδάτινα περιβάλλοντα μετά από t έτη δίνεται από την συνάρτηση W(t)=Wo· , όπου t≥0 και Wo, a πραγματικοί αριθμοί, να υπολογίσετε τους αριθμούς Wo και α. Να εξηγήσετε τι παριστάνει η σταθερά Wo στο πλαίσιο του προβλήματος και γιατί ισχύει α>1.

Β) Αν W(t)=152 , να βρεθεί: i) η μάζα των πλαστικών σε 10 χρόνια, ii) σε πόσα έτη η μάζα των πλαστικών θα έχει διπλασιαστεί σε σχέση με το 2020; Τι παρατηρείτε;

Γ) Να σχεδιάσετε την γραφική παράσταση της συνάρτησης W.

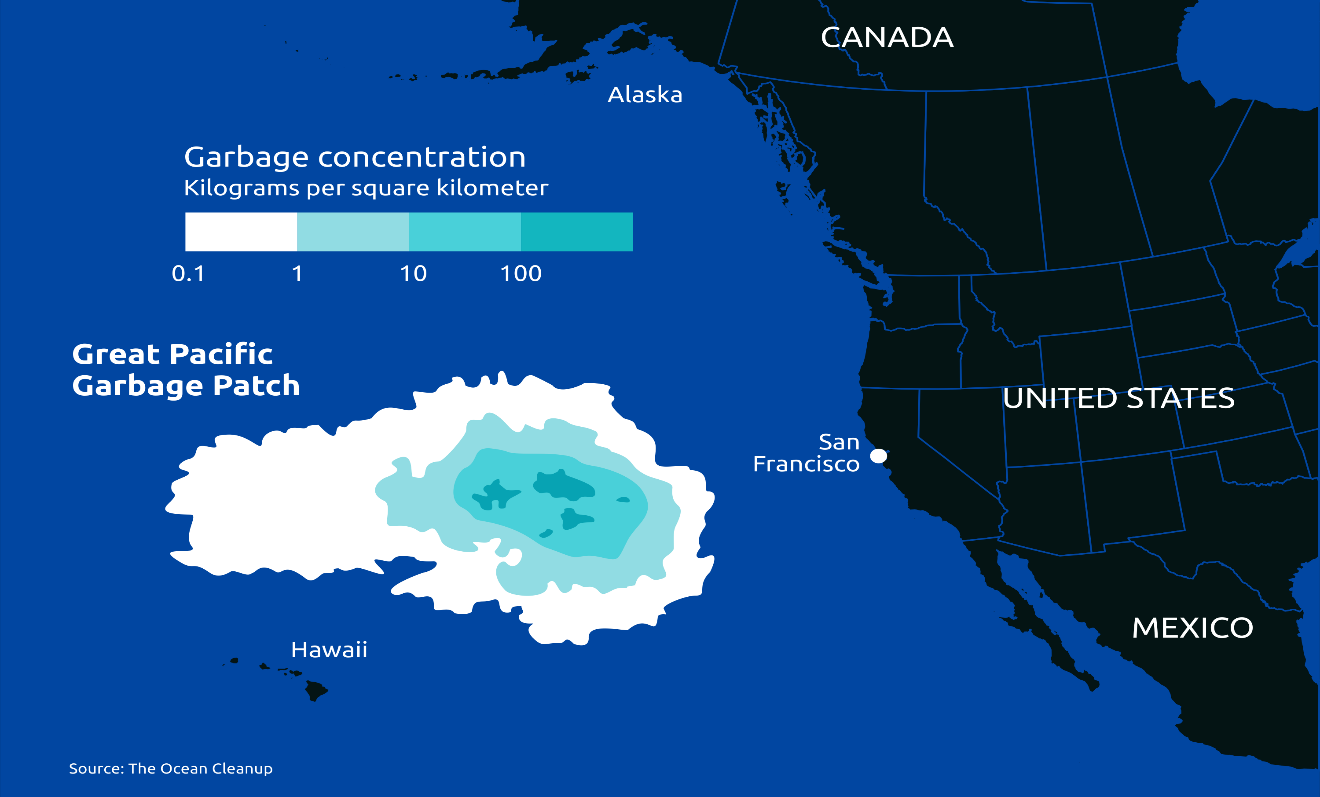
Δ) Συζητήστε την σημασία του γραφήματος, τους τρόπους με τους οποίους τα πλαστικά καταλήγουν στον ωκεανό και αναφέρετε τρόπους μείωσης των πλαστικών στην καθημερινότητά σας.

**Μέρος 2:Το Great Pacific Garbage Patch**

Όπως είδαμε στο Μέρος 1, γενικά η συσσώρευση των πλαστικών απορριμμάτων στους ωκεανούς αυξάνεται με εκθετικούς ρυθμούς. Θα δούμε ειδικότερα τώρα μια ενδιαφέρουσα υποπερίπτωση του προβλήματος αυτού και θα κληθούμε να δώσουμε –πραγματικές!- λύσεις.

Τα πλαστικά, τα αλιευτικά δίχτυα και λοιπά απορρίμματα που διαρρέουν στους ωκεανούς μετακινούνται μαζικά και τείνουν να συσσωρεύονται λόγω των περιστρεφόμενων ωκεάνιων ρευμάτων σε μεγάλες περιοχές -σαν νησιά- τα οποία αποκαλούνται «μπαλώματα». Έχουν εντοπιστεί πέντε μεγάλου μεγέθους τέτοια μπαλώματα, με το μεγαλύτερο να είναι το Great Pacific Garbage Patch (GPGP), που βρίσκεται μεταξύ της Χαβάης και της Καλιφόρνια.

Αξίζει να σημειωθεί ότι παρόλο που το GPGP –αποκαλείται και η **όγδοη ήπειρος**- καλύπτει περίπου το 0.5% της παγκόσμιας επιφάνειας των ωκεανών, εκτιμάται ότι περιέχει περισσότερο από το 50% της μάζας των πλαστικών που πλέουν στους ωκεανούς.



1) Χρησιμοποιώντας την εφαρμογή Google Earth και την παραπάνω φωτογραφία που δίνεται από την ΜΚΟ The Ocean Cleanup, προσπαθήστε να υπολογίσετε την επιφάνεια του GPGP. Συζητήστε τα αποτελέσματά σας. Υπάρχουν αποκλίσεις; Αν ναι, γιατί; Αναρωτηθείτε γιατί δεν φαίνεται το «νησί» αυτό στο Google Earth. Προσπαθήστε να βρείτε ένα εύρος για το μέγεθος του GPGP και συγκρίνετε με τα δεδομένα που δίνονται από την ΜΚΟ στην ιστοσελίδα <https://theoceancleanup.com/great-pacific-garbage-patch/>

2) Αν η επιφάνεια του GPGP σήμερα υπολογίζεται στα 1,6 εκατομμύρια τετραγωνικά χιλιόμετρα και αν υποθέσουμε ότι το μέγεθός του αυξάνεται κατά 5% τον χρόνο, να υπολογίσετε το μέγεθος του νησιού σε 5 χρόνια. Συγκρίνετε με την επιφάνεια της χώρας μας. Τι παρατηρείτε;

3) Συζητήστε α) τους τρόπους που κατά την άποψή σας εισρέουν απορρίμματα στους ωκεανούς, β) τον αντίκτυπο που έχει η θαλάσσια ρύπανση στη θαλάσσια πανίδα, το περιβάλλον, την ανθρώπινη υγεία, τις κοινωνικές δραστηριότητες και την οικονομία και γ) προτείνετε μέτρα σε κοινωνικό και ατομικό πλαίσιο που μπορούμε να εφαρμόσουμε για να μειωθεί ο ρυθμός αύξησης των θαλάσσιων απορριμμάτων.

**Β) Λύση Προβλήματος**

**Μέρος 1**

Α) Θεωρώντας t=0 το έτος 2020, αφού έχουμε από υπόθεση ότι το 2020 τα πλαστικά απορρίμματα σε εκ τόνους είναι 152 έχουμε W(0)=152 ⬄Wo=152

Το επόμενο έτος, άρα για t=1, έχουμε 50% αύξηση άρα W(1)=152+50%152=1,5·152

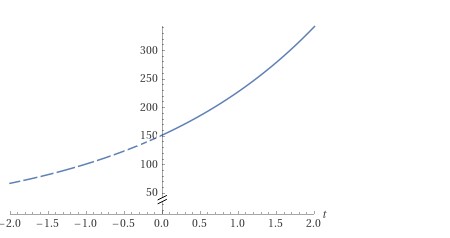
Από τον τύπο της συνάρτησης έχουμε W(1)=Wo·⬄1,5·152= 152·⬄ a=1,5

Η σταθερά Wo παριστάνει την αρχική μάζα πλαστικών απορριμμάτων το έτος 0 (δηλαδή το 2020), η σταθερά α είναι μεγαλύτερη από 1 καθώς έχουμε αύξηση της μάζας ανά έτος.

Β) i)W(10)=152·=8765.0859375 εκατομμύρια τόνοι!

ii) Yπολογίζουμε το t για το οποίο W(t)=2Wo ⬄ 2Wo=Wo·⬄ =2⬄t=1.70951 έτη. Βλέπουμε δηλαδή ότι σε λιγότερο από 2 χρόνια τα σκουπίδια διπλασιάστηκαν! Συζητάμε με τους μαθητές για την ραγδαία αυτή αύξηση σε τόσο σύντομο χρονικό διάστημα με σκοπό να γίνει κατανοητή η «ταχύτητα» με την οποία αυξάνεται η μάζα.

Γ)Σχεδιάζουμε την συνάρτηση σε σύστημα συντεταγμένων στο επίπεδο, τοποθετώντας στον κατακόρυφο άξονα το W (σε εκ τόνους) και στον οριζόντιο άξονα το t (σε έτη). Προσέχουμε ωστόσο η συνάρτηση να μην σχεδιαστεί για αρνητικές τιμές του t και να ξεκινάει ο σχεδιασμός από το σημείο με συντεταγμένες (0,152)



Δ) Συζητάμε με τους μαθητές για το πόσο «απότομη» είναι η καμπύλη της εκθετικής συνάρτησης και τι σημαίνει αυτό πρακτικά για τον –δυστοπικό αν δεν ληφθεί δράση- ρυθμό αύξησης των απορριμμάτων. Τους αφήνουμε να αναρωτηθούν και να σχολιάσουν ελεύθερα για το πώς μπορεί να συμβαίνει αυτό. Αξίζει να συμπεριλάβουμε στον διάλογο την υπεραλίευση και τα απορρίμματα που η αλιεία προσθέτει στους ωκεανούς (μπορούμε να τους δείξουμε στατιστικά), τον υπερτουρισμό, την υπερβολική χρήση των πλαστικών μιας χρήσης στην καθημερινότητά μας και την μη ορθή διαχείριση απορριμμάτων. Προτείνουμε να αναρωτηθούν πόσα πλαστικά χρησιμοποιούμε κάθε μέρα, πού πάνε π.χ οι σακούλες, τα ποτήρια, τα μπουκάλια μιας χρήσης που χρησιμοποιούμε αφού τα απορρίψουμε. Τονίζουμε τη σημασία της μείωσης της χρήσης προϊόντων μιας χρήσης, της επαναχρησιμοποίησης προϊόντων και της ανακύκλωσης όπου γίνεται, καθώς επίσης και της συμμετοχής σε προσπάθειες καθαρισμού του περιβάλλοντος.

**Μέρος 2**

1)Καταρχάς παρατηρούμε ότι το GPGP δεν είναι ορατό στο Google Earth. Συζητάμε πώς γίνεται αυτό – έρχεται σε αντίθεση με τα δεδομένα που έχουμε για το μέγεθός του; Αναφέρουμε το γεγονός ότι αποτελείται κατά ένα μεγάλο μέρος από μικροπλαστικά που δεν φαίνονται εύκολα από δορυφόρους λόγω του μεγέθους τους αλλά και εξαιτίας των ρευμάτων που τα κάνουν να μετακινούνται διαρκώς. Επιπλέον πολλά από τα απορρίμματα έχουν πυκνότητα μεγαλύτερη από το νερό οπότε δεν είναι στην επιφάνειά του. Δεν πρόκειται για μια συμπαγή μάζα αλλά για πολλά διάσπαρτα υλικά.

Έπειτα αφήνουμε τους μαθητές να προσπαθήσουν με βάση την φωτογραφία που δίνεται να υπολογίσουν την επιφάνεια του GPGP. Το πρόβλημα είναι ανοικτό.Γρήγορα γίνεται αντιληπτό ότι δεν είναι εύκολος ένας τέτοιος υπολογισμός καθώς το σχήμα του «νησιού» δεν είναι κάποιο από τα γνωστά μας γεωμετρικά σχήματα για τα οποία έχουμε τύπους υπολογισμού. Όμως τους προτρέπουμε να δώσουν εκτιμήσεις (είτε με χωρισμό της έκτασης του νησιού σε μικρότερους τομείς είτε να το οριοθετήσουν στον χάρτη και να δώσουν ένα εύρος). Τους ενθαρρύνουμε να μετρήσουν την απόσταση 2 σημείων της φωτογραφίας π.χ του San Francisco με τη Santa Barbara, να μετρήσουν την πραγματική απόσταση αυτών των σημείων στο Google Maps και να την χρησιμοποιήσουν ως μονάδα μέτρησης για τον υπολογισμό της επιφάνειας του νησιού. Αφού μας δώσουν τις εκτιμήσεις τους, παρατηρούμε ότι υπάρχουν αποκλίσεις σε αυτές και σημειώνουμε ότι κάτι τέτοιο είναι φυσιολογικό λόγω άλλωστε του τρόπου σχηματισμού της μάζας αυτής, της καμπυλότητας της Γης (δεν είναι επίπεδο για να μετρήσουμε με ακρίβεια τις αποστάσεις) κλπ. Αφήνουμε τους μαθητές να συγκρίνουν τις εκτιμήσεις τους με τις εκτιμήσεις των επιστημόνων της ΜΚΟ.

2)Λειτουργούμε όπως και στην λύση του προβλήματος στο Μέρος 1, αφού πρόκειται και πάλι για μια εκθετική αύξηση. Η συνάρτηση που προκύπτει για την επιφάνεια του GPGP είναι f(t)= όπου f η επιφάνεια σε εκατομμύρια τετραγωνικά χιλιόμετρα και t ο χρόνος σε έτη. Σε 5 χρόνια η επιφάνεια του νησιού θα είναι f(5)= 2.0420505 εκ km², ενώ η έκταση της χώρας μας είναι 131.957 km². Μετατρέπουμε την επιφάνεια του νησιού σε km² πολλαπλασιάζοντας με το 1.000.000, και διαιρούμε με την επιφάνεια της χώρας μας: 2042050.5: 131957 15. Δηλαδή το νησί σε 5 χρόνια θα έχει έκταση 15 φορές μεγαλύτερη της Ελλάδας!

3)Όπως και στο Δ του Μέρους 1. Στον αντίκτυπο της θαλάσσιας ρύπανσης σημειώνουμε ότι υπάρχει οικονομικό κόστος δισεκατομμυρίων από τη θαλάσσια ρύπανση(<https://www.worldfinance.com/markets/counting-the-cost-of-plastic-pollution> ) και ότι τα μικροπλαστικά που υπάρχουν σε αφθονία στους ωκεανούς εισέρχονται στον οργανισμό μας μέσω της τροφικής αλυσίδας. Στα μέτρα μπορούμε να αναφέρουμε κυρίως την πρόληψη της εισροής πλαστικών στη θάλασσα. Ωστόσο για να λύσουμε το πρόβλημα αυτό δεν πρέπει μόνο να μειώσουμε ή να σταματήσουμε την εισροή περισσότερου πλαστικού στον ωκεανό, αλλά και να καθαρίσουμε ό,τι υπάρχει ήδη εκεί. Διαφορετικά, τα πλωτά πλαστικά θα συνεχίσουν να κυκλοφορούν έως ότου διασπαστούν σε όλο και μικρότερα κομμάτια, καθιστώντας το όλο και πιο δύσκολο να καθαριστούν. Εάν αφεθεί να κυκλοφορεί, το πλαστικό θα επηρεάσει τα οικοσυστήματα, την υγεία και τις οικονομίες μας για δεκαετίες ή και αιώνες.

**Γ)Σχεδιασμός του προβλήματος**

Ξεκίνησα από το περιβαλλοντικό πρόβλημα της ραγδαίας αύξησης των απορριμμάτων στα υδάτινα περιβάλλοντα και καθώς μελετούσα τα δεδομένα έγινε εμφανές ότι πρόκειται για εκθετική αύξηση, οπότε έτσι προέκυψε η σύνδεση με την διδασκαλία της εκθετικής συνάρτησης. Για τον σχεδιασμό του προβλήματος ήταν αναγκαία η μελέτη αρκετών ιστοσελίδων περιβαλλοντικών οργανώσεων και οργανισμών, καθώς δεν είναι ακριβή τα δεδομένα και κάθε οργανισμός έδινε διαφορετικά στοιχεία είτε για την υπάρχουσα κατάσταση είτε για τις εκτιμήσεις αύξησης.

**Το περιβαλλοντικής φύσης ζήτημα** Η ραγδαία και αδιέξοδη συσσώρευση των πλαστικών κυρίως απορριμμάτων στους ωκεανούς σε τεράστιες μάζες που μετακινούνται με τα θαλάσσια ρεύματα, όπως περιγράφηκε αναλυτικότερα στο Μέρος 2, που οδηγεί με δυστοπικούς ρυθμούς σε πολυεπίπεδες αρνητικές συνέπειες από την οικονομία μέχρι την καταστροφή της βιοποικιλότητας και την απειλή της ανθρώπινης υγείας. Πρόκειται για ένα παγκόσμιο ζήτημα που μας αφορά όλους. Το Μέρος 2 παρουσιάζει μια ειδικότερη περίπτωση του ζητήματος που αναδεικνύει σε μεγαλύτερο βαθμό την έκταση του προβλήματος. Η σπουδαιότητα του προβλήματος έγκειται στο εύρος των συνεπειών του, από το οικολογικό αποτύπωμα, το τεράστιο οικονομικό κόστος, στο κόστος της υγείας και την μεταβολή των κοινωνικών δραστηριοτήτων. Υπάρχουν αντικρουόμενες θέσεις ως προς την επίλυση του προβλήματος, καθώς το κόστος καθαρισμού του ωκεανού είναι τεράστιο και δεν είναι γνωστή η σχέση κόστους/αποτελέσματος/περιβαλλοντικού αντικτύπου των αποστολών καθαρισμού. Πολλοί υποστηρίζουν ότι η μόνη βιώσιμη λύση είναι η μείωση της εισροής των απορριμμάτων στη θάλασσα, θεωρώντας τον καθαρισμό των ωκεανών κάτι αδιέξοδο.

**Δ)Το πλαίσιο διδασκαλίας**

**Τάξη:** Το πρόβλημα αναφέρεται σε μαθητές Β Λυκείου για το μάθημα της Άλγεβρας.

**Διδακτικοί στόχοι:** Κατανόηση γραφήματος, ποσοστών, μετατροπή και εύρεση μονάδων μέτρησης, γεωμετρική αντίληψη, εύρεση εμβαδού, επίλυση εκθετικών εξισώσεων και ανισώσεων και μελέτη εκθετικών συναρτήσεων. Οι μαθητές γίνονται οι ίδιοι ερευνητές κάνοντας τους δικούς τους υπολογισμούς και μετρήσεις, εξασκούν τη δημιουργικότητα και την κριτική τους σκέψη και δρουν με ομαδικότητα ενώ μελετούν και προσπαθούν να επιλύσουν πραγματικά

**Οργάνωση debate:** Στο Μέρος 1 αλλά και στο Μέρος 1 έχουν προταθεί θέματα συζήτησης για τους τρόπους που καταλήγουν τα πλαστικά στην θάλασσα, τον αντίκτυπο αλλά και τρόπους επίλυσης.

**Βιβλιογραφία - Links**

[1] <https://www.oecd.org/environment/plastics/Interim-Findings-Towards-Eliminating-Plastic-Pollution-by-2040-Policy-Scenario-Analysis.pdf>

[2]<https://theoceancleanup.com/updates/system-03-a-beginners-guide/>

<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S2468013319301676>

<https://www.nytimes.com/2023/08/07/climate/plastic-pollution-oceans.html>

<https://theoceancleanup.com/oceans/>